Katlı Kökler:

Eğer kökler katlı ise çözümü 2. mertebeden dif. denklemlerde olduğu gibi farklı aramalıyız. Eğer n. mertebeden denklem için $r=r_1$'de $Z(r)=0$ ve katlılığı $s\leq n$ ise çözüm

$$e^{r_1 t},\ te^{r_1 t},\ t^2 e^{r_1 t},\ \dots,\ t^{s-1}e^{r_1 t}$$

şeklindedir.

Eğer kompleks kökler $\lambda \pm i\mu$'nun katlılığı s ise çözüm

$$e^{\lambda t}\cos\mu t,\ e^{\lambda t}\sin\mu t,\ te^{\lambda t}\cos\mu t,\ te^{\lambda t}\sin\mu t,\ \dots,\ t^{s-1}e^{\lambda t}\cos\mu t,\ t^{s-1}e^{\lambda t}\sin\mu t$$

şeklindedir.

Örnekler: 1) $y^{IV}+2y''+y=0$ dif. denklemin genel çözümünü bul.

$y=e^{rt}$ formunda çözümü ararsak, karakteristik denklem

$$r^4+2r^2+1=0$$

dır.

$$r^4+2r^2+1=(r^2+1)^2 \Rightarrow r_{1,2}=i\ ,\ r_{3,4}=-i$$

$$y=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3 t\cos t+c_4 t\sin t$$

2) $y^{IV}+y''=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$, $y'''(0)=-1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$y=e^{rt}$, $Z(r)=0$?

$$r^4+r^2=0 \Rightarrow r^2(r^2+1)=0 \rightarrow r_{1,2}=0,\ r_{3,4}=\pm i$$

$$y=c_1+c_2 t+c_3\cos t+c_4\sin t$$

$$y'=c_2-c_3\sin t+c_4\cos t$$

$$y''=-c_3\cos t-c_4\sin t$$

$$y'''=c_3\sin t-c_4\cos t$$

$t=0,\ y=1 \Rightarrow 1=c_1+c_3$

$t=0,\ y'=0 \Rightarrow 0=c_2+c_4 \quad \Longrightarrow \quad c_1=3,\ c_2=-1,\ c_3=-2,\ c_4=1$

$t=0,\ y''=2 \Rightarrow 2=-c_3$

$t=0,\ y'''=-1 \Rightarrow -1=-c_4$

$$y=3-t-2\cos t+\sin t$$

4.3 Belirsiz Katsayılar Yöntemi

n. mertebeden homojen olmayan sabit katsayılı lineer dif. denklemlerin

$$L(y)=a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_n y=g(t)$$

bir özel çözümü $Y(t)$, $g(t)$'nin eksponansiyel, sinus, kosinus, polinom veya bunların çarpımları veya toplamları şeklinde olmasına göre belirsiz katsayılar yöntemi ile bulunabilir. Aşağıdaki tabloda $Y(t)$'nin $g(t)$'ye göre nasıl aranması gerektiği verilmiştir.

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_0y=g(t)$$

$g(t)$	$Y(t)$
$P_n(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$	$t^s\left(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\cdots+A_n\right)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s\left(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\cdots+A_n\right)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$	$t^s\Big[\left(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\cdots+A_n\right)e^{\alpha t}\cos\beta t + \left(B_0t^n+B_1t^{n-1}+\cdots+B_n\right)e^{\alpha t}\sin\beta t\Big]$

Burada s homojen kısmın genel çözümüne göre 0,1,2, değerlerini alır.

Örnekler: 1) $y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t$ dif. denklemin genel çözümünü bulunuz.

Homojen kısmın çözümünü $y = e^{rt}$ şeklinde ararsak, karakteristik denklem

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 0$$

dır.

$$(r+1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = -1 \\ r_{2,3} = \mp i \end{array}$$

$$y_h = c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t$$

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-t}$$

$$Y_1(t) = A t e^{-t}$$

$$Y_1' = A(1-t)e^{-t}$$

$$Y_1'' = A(t-2)e^{-t}$$

$$Y_1''' = A(3-t)e^{-t}$$

$$A(3-t+t-2+1-t+t)e^{-t} = e^{-t}$$

$$A 2 e^{-t} = e^{-t} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \qquad Y_1(t) = \frac{1}{2} t e^{-t}$$

$$y''' + y'' + y' + y = 4t$$

$$Y_2(t) = At + B$$

$$Y_2' = A$$

$$Y_2'' = Y_2''' = 0$$

$$A + At + B = 4t \Rightarrow A = 4, \ B = -4$$

$$Y_2(t) = 4t - 4$$

$$y = y_h + Y_1(t) + Y_2(t)$$
$$= c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{1}{2} t e^{-t} + 4t - 4$$

2) $y''' + 4y' = t$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ başlangıç değer problemini çöz.

$$r^3 + 4r = 0 \Rightarrow r(r^2+4) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, \ r_{2,3} = \mp 2i$$

$$y_h = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t$$

$$Y(t) = t(At + B)$$
$$= At^2 + Bt$$

$$Y' = 2At + B$$

$$Y'' = 2A$$

$$Y''' = 0$$

$$4(2At + B) = t \Rightarrow A = \frac{1}{8}, \ B = 0 \qquad Y(t) = \frac{1}{8} t^2$$

$$y = y_h + Y(t) = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t + \frac{1}{8} t^2$$

$$y' = -2c_2 \sin 2t + 2c_3 \cos 2t + \frac{1}{4} t$$

$$y'' = -4 c_2 \cos 2t - 4 c_3 \sin 2t + \frac{1}{4}$$

$t = 0, \ y = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2$

$t = 0, \ y' = 0 \Rightarrow 0 = 2c_3 \qquad \Rightarrow c_1 = \frac{3}{16}, \ c_2 = -\frac{3}{16}, \ c_3 = 0$

$t = 0, \ y'' = 1 \Rightarrow 1 = -4c_2 + \frac{1}{4}$

$$y = \frac{3}{16} - \frac{3}{16} \cos 2t + \frac{1}{8} t^2$$

4.4 Sabitlerin Değişimi Yöntemi

Belirsiz katsayılar yönteminden daha genel yöntem sabitlerin değimi yöntemidir. Genelde katsayıların sabit olmadığı durumda çözüm zor olsa bile, $g(t)$ fonksiyonu sürekli olduğu takdirde yöntemi doğrudan doğruya 2. mertebeden dif. denklemlerde olduğu gibi genişletebiliriz.

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t) y' + p_n(t) y = g(t) \quad (4.2)$$

n. mertebeden lineer dif. denklemin homojen kısmın çözümü

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

olsun. Özel çözümü bulmak için $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri yerine $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ fonksiyonlarını koyalım.

$$Y(t) = u_1(t)\, y_1(t) + \dots + u_n(t)\, y_n(t) \qquad (4.9)$$

n-tane bilinmeyen fonksiyon olduğundan, bilinmeyenleri kolaylıkla bulabileceğimiz n tane şarta ihtiyacımız vardır. Birinci şart (4.2) denklemidir. n-1 koşulu aşağıdaki gibi seçiyoruz; (4.9)'un birinci türevinden

$$Y' = u_1 y_1' + \dots + u_n y_n' + u_1' y_1 + \dots + u_n' y_n$$

$$u_1' y_1 + \dots + u_n' y_n = 0$$

alıyoruz, böyle devam edilirse Y'nin n-1. türevine kadar değerler

$$Y^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + u_2 y_2^{(m)} + \dots + u_n y_n^{(m)}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ve n-1 koşul

$$u_1' y_1^{(m-1)} + u_2' y_2^{(m-1)} + \dots + u_n' y_n^{(m-1)} = 0, \qquad m = 1, 2, \dots, n-1 \qquad (4.10)$$

dır. Y'nin n. türevi

$$Y^{(n)} = u_1 y_1^{(n)} + \dots + u_n y_n^{(n)} + u_1' y_1^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} \qquad (4.11)$$

dır. (4.10) ve (4.11) denklemleri (4.2)'de yerine konur ve düzenlenirse

$$u_1' y_1^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = g \qquad (4.12)$$

elde edilir. $u_1', u_2', \dots, u_n'$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere n-bilinmeyenli n-denklem elde ederiz.

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \dots + y_n u_n' &= 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + \dots + y_n' u_n' &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \dots + y_n^{(n-1)} u_n' &= g \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Bu denklemin çözümü olması için katsayılar determinantının her t için sıfırdan farklı olması gerekir. Katsayılar determinantı $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t)$ dir ve $y_1, y_2, \dots, y_n$ temel çözüm olduklarından $W \neq 0$ dır. Buna göre sistemin çözümü vardır. Kramer kuralı kullanılarak sistemi çözebiliriz. $W(t) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t)$ ve W_m ile de W'de m. sütun yerine $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ sütunu yazılarak elde edilen determinant olmak üzere

$$u_m'(t) = \frac{g(t)\, W_m(t)}{W(t)}, \qquad m = 1, 2, \dots, n$$

dır. Denklemin özel çözümü, t_0 keyfi olmak üzere

$$Y(t) = \sum_{m=1}^{n} y_m(t) \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)\, W_m(s)}{W(s)}\, ds$$

dir.

Aşikar olarak n'nin gittikçe büyümesinin $Y(t)$'yi bulmayı güçleştirdiği ortadadır. Bazı durumlarda Abel eşitsizliği

$$W(t) = c\, e^{-\int p_1(t)\, dt}$$

kullanılarak Wronskiyan daha basit bulunabilir.

Örnekler: 1) $x, x^2, \frac{1}{x}$

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2x y' + 2y = 2x^4 \qquad x > 0$$

dif. denkleminin homojen kısmının çözümleri ise bir özel çözümü bulunuz.

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & \frac{1}{x} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = \frac{6}{x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^{-1} \\ 0 & 2x & -x^{-2} \\ 1 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = -3$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x^{-1} \\ 1 & 0 & -x^{-2} \\ 0 & 1 & 2x^{-3}\end{vmatrix} = \frac{2}{x} \qquad W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

$$y''' + \frac{1}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = 2x \quad x>0$$

$$g(x) = 2x$$

$$Y = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 = x\int_0^x \frac{2s\cdot(-3)}{\frac{6}{s}}ds + x^2\int_0^x \frac{2s\cdot\frac{2}{s}}{\frac{6}{s}}ds + \frac{1}{x}\int_0^x \frac{2s\cdot s^2}{\frac{6}{s}}ds$$

$$= x\int_0^x(-s^2)ds + x^2\int_0^x\left(\frac{2}{3}s\right)ds + \frac{1}{x}\int_0^x\left(\frac13 s^4\right)ds = x\left(-\frac{x^3}{3}\right) + x^2\left(\frac{x^2}{3}\right) + \frac1x\cdot\frac{x^5}{15}$$

$$Y(x) = \frac{x^4}{15}$$

2) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$ dif. denkleminin genel çözümünü bul.

$y = e^{rt}$, $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$ $\begin{pmatrix}\pm 2\\ \pm 1\end{pmatrix}$ $(r-1)(r+1)(r-2)=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1,\ r_3=2$

$$y_h = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t}$$

$$W(e^t, e^{-t}, e^{2t}) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} & e^{2t}\\ e^t & -e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 4e^{2t}\end{vmatrix} = e^t\cdot e^{-t} e^{2t}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{vmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\0&0&3\end{vmatrix} = -6e^{2t}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix}0 & e^{-t} & e^{2t}\\0&-e^{-t}&2e^{2t}\\1&e^{-t}&4e^{2t}\end{vmatrix} = 3e^t \qquad W_2 = \begin{vmatrix}e^t&0&e^{2t}\\e^t&0&2e^{2t}\\e^t&1&4e^{2t}\end{vmatrix} = -e^{3t}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix}e^t&e^{-t}&0\\e^t&-e^{-t}&0\\e^t&e^{-t}&1\end{vmatrix} = -2 \qquad Y(t) = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$$

$$Y(t) = e^t\int_0^t \frac{e^{4s}(3e^s)}{-6e^{2s}}ds + e^{-t}\int_0^t\frac{e^{4s}(-e^{3s})}{-6e^{2s}}ds + e^{2t}\int_0^t\frac{e^{4s}\cdot(-2)}{-6e^{2s}}ds$$

$$Y(t) = e^t\left(-\frac16 e^{3t}\right) + e^{-t}\left(\frac{1}{30}e^{5t}\right) + e^{2t}\left(\frac16 e^{2t}\right) = \frac{1}{30}e^{4t}$$

(Belirsiz katsayılar yöntemi ile çözersek

$$Y(t) = Ae^{4t}$$

$$Y' = 4Ae^{4t} \quad Y'' = 16Ae^{4t} \quad Y''' = 64Ae^{4t}$$

$$(64A - 32A - 4A + 2A)e^{4t} = e^{4t}$$

$$30Ae^{4t} = e^{4t} \Rightarrow A = \frac{1}{30}$$

$$Y(t) = \frac{1}{30}e^{4t}$$)

Genel çözüm

$$y = y_h + Y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + \frac{1}{30}e^{4t}$$

3) $y''' + y' = \sec t$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-2$ başlangıç değer prob. çöz.

$y=e^{rt}$, $r^3+r=0 \Rightarrow r(r^2+1)=0 \Rightarrow r_1=0$, $r_{2,3}=\mp i$

$$y_h = c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t$$

$$W(y_1,y_2,y_3)(t) = \begin{vmatrix}1&\cos t&\sin t\\0&-\sin t&\cos t\\0&-\cos t&-\sin t\end{vmatrix} = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix}0&\cos t&\sin t\\0&-\sin t&\cos t\\1&-\cos t&-\sin t\end{vmatrix}=1 \qquad W_2 = \begin{vmatrix}1&0&\sin t\\0&0&\cos t\\0&1&-\sin t\end{vmatrix} = -\cos t$$

$$W_3 = \begin{vmatrix}1&\cos t&0\\0&-\sin t&0\\0&-\cos t&1\end{vmatrix} = -\sin t \qquad Y(t) = y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3$$

$$Y(t) = 1\cdot\int_0^t\frac{\frac{1}{\cos s}\cdot 1}{1}ds + \cos t\cdot\int_0^t\frac{\frac{1}{\cos s}\cdot(-\cos s)}{1}ds + \sin t\int_0^t\frac{\frac{1}{\cos s}\cdot(-\sin s)}{1}ds$$

$$= \frac12\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \cos t\cdot(-t) + \sin t\ln\cos t$$

$$y = c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t + \ln(\sec t + \tan t) - t\cos t + \sin t\ln\cos t$$

$$y' = -c_2\sin t + c_3\cos t + \frac{1}{\cos t} - \cos t + t\sin t + \cos t\ln\cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t}$$

$$y'' = -c_2\cos t - c_3\sin t - \tan t + \sin t + \sin t + t\cos t$$
$$- \sin t \ln\cos t - \sin t - \left(\frac{\sin^2 t}{\cos t}\right)'$$

$t=0,\ y=2 \Rightarrow 2 = c_1 + c_2$

$t=0,\ y'=1 \Rightarrow 1 = c_3 \qquad \Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = 1$

$t=0,\ y''=-2 \Rightarrow -2 = -c_2$

$$y = 2\cos t + \sin t + \ln(\sec t + \tan t) - t\cos t + \sin t \ln\cos t$$